جلسه چهاردهم

دوشنبه ، ۱۹ آبان ۱۴۰۴

یادآوری (مفهوم پایایی سیستم‌ها)

جواب عمومی معادله

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = F(t) \qquad (1)$$

عبارتست از :

$$x(t) = \underbrace{C_1 x_1 + C_2 x_2}_{= x_h} + x_p \qquad (2)$$

$$\left(\text{معادله دیفرانسیل (1) پایاست.}\right) \iff \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \lim_{t\to\infty} (C_1 x_1 + C_2 x_2) = 0 \qquad (3)$$

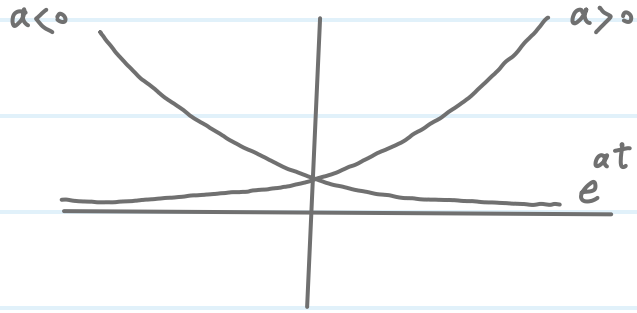
* شرط پایایی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

می دانیم ورودی $F(t)$ در معادله (1) نقشی در پایایی سیستم (1) ندارد و لذا بجای بررسی پایایی معادله (1) ، به طور معادل، می‌توانیم پایایی معادله همگن متناظر با آن یعنی معادله

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = 0 \qquad (4)$$

را بررسی کنیم.

با توجه به ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه معادله (4)، یعنی چندجمله‌ای $p(r) = mr^2 + br + K$ ، برای پایایی معادله (4) سه حالت زیر وجود دارد :

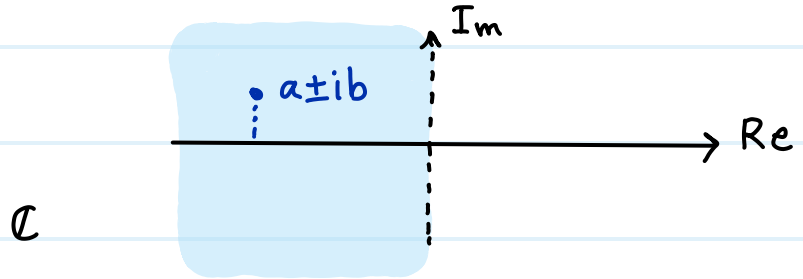


*

ریشه‌های $p(r)$	جواب ODE همگن (۴)	شرط پایایی
$r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 \neq r_2$	$c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$	$r_1 < 0$, $r_2 < 0$ *
$r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$	$e^{r_1 t}(c_1 + c_2 t)$	$r_1 = r_2 < 0$
$r_{1,2} = a \pm ib \quad (b \neq 0)$	$e^{at}\left(c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)\right)$	$a = \mathrm{Re}(r_{1,2}) < 0$

* معیار ریشه برای پایایی یک ODE مرتبه دوم خطی با ضرائب ثابت $(m \neq 0)$

$$\boxed{\left(\begin{array}{l} m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \text{ معادله} \\ (m \neq 0) \qquad \text{پایاست} \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{تمامی ریشه‌های } p(r) = mr^2 + br + k \\ \text{دارای قسمت حقیقی منفی است} \end{array}\right)}$$



* تذکر: برای داشتن سیستم پایا، هیچ یک از ضرائب نمی‌تواند صفر باشد.

اگر $b = 0 \Rightarrow p(r) = mr^2 + k \xrightarrow{\text{ریشه‌های } p(r)} \begin{cases} r_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} \in \mathbb{R} \ ; \ -\frac{k}{m} > 0 \ \times \\ r_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \in \mathbb{C} \ ; \ -\frac{k}{m} < 0 \ \times \end{cases}$

اگر $K=0 \Rightarrow p(r)=r(mr+b) \Longrightarrow \begin{cases} r_1=0 \\ , \\ r_2=-\frac{b}{m} \end{cases}$

---

* معیار ضرائب برای پایایی یک ODE مرتبه دو خطی با ضرائب ثابت

$$\boxed{\left(\begin{array}{l}\text{معادلهٔ } m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=F(t) \\ (m\neq 0) \\ \text{پایاست.}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{تمامی ضرائب معادله (یعنی } m\text{، } b \text{ و } K\text{) اعدادی} \\ \text{ناصفر و هم علامت باشند.}\end{array}\right)}$$

* پایایی یک ODE خطی با ضرائب ثابت از مرتبهٔ $n \geq 3$

عملگر همانی $D^0 := id$

فرض کنید سیستمی را توسط ODE زیر مدل کرده ایم: $\boxed{D^n := \frac{d^n}{dt^n}}$, $\boxed{D := \frac{d}{dt}}$

$$(5) \qquad \left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right)(x) = F(t)$$

در این صورت معادله مشخصه ODE همگن متناظر با معادلهٔ (۵) عبارتست از:

$$(6) \qquad p(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

---

* معیار ریشه برای پایایی معادله دیفرانسیل (۵)

$$\boxed{\left(\text{معادله (۵)، معادله‌ای پایاست.}\right) \Longleftrightarrow \left(\text{تمامی ریشه های معادلهٔ (۶) دارای قسمت حقیقی منفی باشد}\right)}$$

* تذکر: بدون از دست دادن کلیت (WLOG) می‌توانیم فرض کنیم $\boxed{a_0 = 1}$. در این صورت به آسانی می‌توان نشان داد که:

(تمامی ضرائب معادله (یعنی a_i ها) اعدادی ناصفر و مثبت هستند.) $\Longrightarrow$ (معادله (۵) پایا باشد با شرط $a_0 = 1$)

$\not\Longleftarrow$

(چون $a_0 = 1 > 0$)

اما عکس گزاره آخر (یعنی حالت $\Longleftarrow$) برای معادلات مرتبه $n \geq 3$ لزوماً صحیح نمی‌باشد.

---

* معیار راث - هروئیتس برای پایایی:

(راث ریاضیدان انگلیسی در سال ۱۸۷۵ الگوریتمی برای یافتن تعداد ریشه‌هایی که در نیم‌صفحه سمت راست صفحه مختلط قرار دارند، ارایه می‌کند.)

(هروئیتس، ریاضیدان آلمانی در سال ۱۸۹۵ با استفاده از نتایج راث، معیار راث، هروئیتس را برای پایایی ارایه می‌کند.)

معادله دیفرانسیل خطی با ضرائب ثابت مرتبه n زیر را در نظر گیرید:

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)(x) = F(t) \qquad (۷)$$

که در آن، بدون از دست دادن کلیت، فرض کرده‌ایم $a_0 = 1$.

حال با استفاده از ضرائب $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ، ماتریس های زیر (معروف به ماتریس های هروئیتس) را تعریف می‌کنیم:

$$H_1 := (a_1) \quad , \quad H_2 := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad , \quad H_3 := \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$, \ \dots \ , \quad H_n := \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & & & & & & a_n \end{pmatrix}_{n \times n} ;$$

(که هرجا $j > n$ قرار دارد می‌کنیم $\underline{a_j := 0}$)

در این صورت:

$$\boxed{\left(\text{معادله (V) پایاست}\right) \Longleftrightarrow \left(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \det H_i > 0\right)}$$

$\Longleftrightarrow$ تمامی ریشه های چندجمله‌ای مشخصهٔ معادله (V) دارای قسمت حقیقی منفی باشند.

تمرین: نشان دهید که معیار راث - هروئیتس برای پایایی معادله (V) را وقتی $n = 2, 3$ است می‌توان به صورت زیر نیز بیان نمود:

$$\left(H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_2 = a_1 a_2 > 0 \right)$$

$\underline{n=2}$: $a_1>0$, $a_2>0$

$\hookrightarrow \left(\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_2x=F(t)\right)$

$\underline{n=3}$: $a_1>0$, $a_3>0$, $a_1a_2>a_3$

$\hookrightarrow x^{(3)}+a_1\ddot{x}+a_2\dot{x}+a_3x=F(t)$

مثال: کدام یک از سیستم های زیر پایا هستند؟

(i) $-2\ddot{x}-\dot{x}-x=\sin t$ ✓ (معیار ضرائب)

(ii) $x^{(3)}+\ddot{x}+2\dot{x}+x=\cos t$ ✓ $(a_1=1=a_3,\ a_2=2)$ (معیار راث - هروئیتس)

(iii) $-x^{(3)}-\ddot{x}-2\dot{x}-x=F(t)$ ✓ (معیار راث - هروئیتس)

(iv) $2x^{(4)}+3x^{(3)}+\ddot{x}+6\dot{x}-5x=t^2+t-1$ ✗ (فاقد شرط لازم برای پایایی است.) (معیار ضرائب)

(v) $x^{(100)}+x=F(t)$ ✗ (فاقد شرط لازم برای پایایی است.) (معیار ضرائب)